

ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN PENYAKIT ISPA (INFEKSI SALURAN PERNAPASAN AKUT) DENGAN KRITERIA ROUTH-HURWITZNurul Juliani¹, Mardiningsih²^{1,2}Universitas Sumatera UtaraEmail: nuruljuliani@usu.ac.id¹, mardiningsih.math@gmail.com²

Abstrak: Analisis kestabilan sistem penyebaran penyakit diperlukan untuk memahami perilaku penyakit dalam jangka panjang, seperti pada kasus Infeksi Saluran Pernapasan Akut (ISPA). Penelitian ini menggunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk menentukan kestabilan sistem di sekitar titik ekuilibrium, dengan meninjau tanda elemen pada kolom pertama Routh array. Hasil menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit bersifat tidak stabil karena adanya nilai eigen positif (λ_3) dan angka reproduksi dasar $R_0 > 1$. Sebaliknya, titik ekuilibrium endemik terbukti stabil karena memenuhi keempat kriteria Routh-Hurwitz. Simulasi numerik menunjukkan bahwa sekitar 39,4% individu dalam populasi berpotensi menularkan ISPA. Dengan demikian, penyakit ISPA akan tetap berada dalam populasi.

Kata Kunci: Kestabilan, Routh-Hurwitz, Titik Ekuilibrium, ISPA.

***Abstract:** Stability analysis of disease spread systems is necessary to understand the behavior of diseases in the long term, such as in the case of Acute Respiratory Infection (ARI). This study uses the Routh-Hurwitz criterion to determine the stability of the system around the equilibrium point, by reviewing the sign of the elements in the first column of the Routh array. The results show that the disease-free equilibrium point is unstable due to the presence of a positive eigenvalue (λ_3) and a basic reproduction number $R_0 > 1$. In contrast, the endemic equilibrium point is proven to be stable because it meets all four Routh-Hurwitz criteria. Numerical simulations show that about 39.4% of individuals in the population have the potential to transmit ARI. Thus, ARI disease will remain in the population.*

***Keywords:** Stability, Routh-Hurwitz, Equilibrium Point, ARI.*

PENDAHULUAN

Pemodelan matematika digunakan untuk memahami dinamika penyebaran penyakit dengan menyederhanakan fenomena kompleks menjadi sistem persamaan diferensial. Ndi (2022) mengelompokkan model matematika menjadi dua, yaitu model fenomena dan model mekanistik, dan menyatakan bahwa model penyebaran penyakit termasuk dalam kategori mekanistik karena menggambarkan proses penularan secara eksplisit. Dalam epidemiologi, model mekanistik seperti SEIR menjadi alat utama dalam mengkaji penyebaran penyakit menular, termasuk ISPA.

Titik ekuilibrium menjadi indikator penting dalam menentukan apakah penyakit akan

punah atau bertahan dalam populasi. Penentuan kestabilan sistem biasanya dilakukan melalui analisis nilai eigen dari matriks Jacobian. Namun, perhitungan sering kali kompleks, terutama pada sistem berdimensi tinggi. Oleh karena itu, kriteria Routh-Hurwitz menjadi alternative yang lebih efisien karena memungkinkan analisis kestabilan tanpa menghitung akar polynomial karakteristik (Nurfadilah *et al.*, 2021; Sulisti *et al.*, 2014).

Kasus ISPA di Indonesia mengalami peningkatan drastic dalam tiga tahun terakhir. Berdasarkan laporan Kementerian Kesehatan, jumlah kasus ISPA yang tercatat pada tahun 2021 kurang dari 3.000 kasus, meningkat menjadi 70.000 kasus pada 2022, dan mencapai 200.000 kasus pada 2023 (Hidayat, 2023). Hal ini menjadikan ISPA sebagai isu kesehatan masyarakat yang krusial.

Penelitian sebelumnya telah mengembangkan berbagai model penyebaran penyakit, seperti SEIR (Irwan *et al.*, 2022) dan SEHAR (Nurfadilah *et al.*, 2021), namun belum mempertimbangkan faktor kerentanan khusus seperti penyakit jantung bawaan (PJB). Padahal, individu dengan PJB cenderung mengalami gejala lebih berat dan infeksi berulang (Sadono & Soetadji, 2013; Wilar & Wantania, 2006). Dengan latar belakang tersebut, penelitian ini mengembangkan model SEIR dengan mempertimbangkan proporsi individu dengan PJB dan menganalisis kestabilan dengan kriteria Routh-Hurwitz, guna memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang dinamika penyebaran ISPA.

METODE PENELITIAN

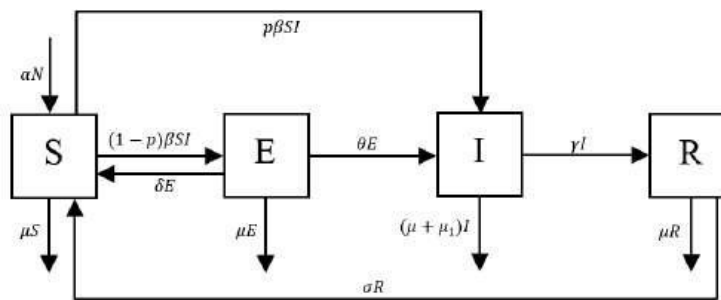
Pembentukan Model SEIR dengan Faktor PJB

Model SEIR terdiri dari empat kompartemen: *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Infected* (I), dan *Recovered* (R) (Irwan *et al.*, 2022). Modifikasi dilakukan dengan mempertimbangkan individu yang memiliki riwayat penyakit jantung bawaan (PJB), yang memiliki peluang lebih tinggi untuk langsung terinfeksi ISPA tanpa melalui masa inkubasi. Asumsi dasar yang digunakan dalam pembangunan model adalah sebagai berikut:

1. Populasi diasumsikan tertutup, artinya tidak ada migrasi masuk atau keluar.
2. Total populasi N dianggap konstan sepanjang waktu akibat keseimbangan antara kelahiran dan kematian alami.
3. Individu yang rentan (*Susceptible*) dapat terinfeksi melalui kontak dengan individu terinfeksi (*Infected*) dengan laju penularan β .

4. Individu dengan PJB memiliki peluang lebih besar untuk langsung terinfeksi tanpa melalui fase paparan (*Exposed*), direpresentasikan oleh parameter p , yaitu proporsi populasi dengan PJB.
5. Individu terpapar (*Exposed*) dapat berkembang menjadi terinfeksi (*Infected*) dengan laju θ atau pulih langsung tanpa gejala dengan laju δ .
6. Individu yang sembuh (*Recovered*) dapat kehilangan kekebalan dan kembali menjadi rentan dengan laju σ .
7. Kematian terjadi secara alami dengan laju μ dan kematian karena ISPA diperhitungkan secara terpisah melalui laju μ_1 .
8. Tidak ada vaksinasi atau intervensi medis dalam model.

Berdasarkan asumsi dasar, kompartemen penelitian dapat dibentuk dalam diagram berikut:



Gambar 1. Diagram model penyebaran ISPA penelitian

Dan karena N bersifat konstan, maka dapat dibuat variabel baru sebagai fraksi dari total populasi, yaitu:

$$s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}$$

Dengan demikian,

$$\frac{S}{N} + \frac{E}{N} + \frac{I}{N} + \frac{R}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

Sehingga bentuk sistem persamaan diferensial penyebaran ISPA dengan PJB adalah:

$$\frac{ds}{dt} = \alpha - \beta si + \delta e + \sigma r - \mu s \quad (1)$$

$$\frac{de}{dt} = (1 - p)\beta si - (\delta + \theta + \mu)e \quad (2)$$

$$\frac{di}{dt} = p\beta si + \theta e - (\gamma + \mu + \mu_1)i \quad (3)$$

$$\frac{di}{dt} = \gamma i - (\sigma + \mu)r \quad (4)$$

Analisis Titik Ekuilibrium dan Kestabilan

Titik ekuilibrium diperoleh dengan mensubstitusi turunan waktu sama dengan nol, maka persamaan (1) hingga (4) dapat ditulis kembali menjadi:

$$\alpha - \beta si + \delta e + \sigma r - \mu s = 0 \quad (5)$$

$$(1 - p)\beta si - (\delta + \theta + \mu)e = 0 \quad (6)$$

$$p\beta si + \theta e - (\gamma + \mu + \mu_1)i = 0 \quad (7)$$

$$\gamma i - (\sigma + \mu)r = 0 \quad (8)$$

Dua jenis ekuilibrium yang dianalisis adalah:

- Titik ekuilibrium bebas penyakit : ketika $I = 0$
- Titik ekuilibrium endemik : ketika $I > 0$

Untuk menganalisis kestabilan, dilakukan:

- Linierisasi sistem dan pembentukan matriks Jacobian.
- Penentuan karakteristik polinomial dari Jacobian.
- Aplikasi Kriteria Routh-Hurwitz untuk memeriksa tanda elemen kolom pertama Routh array (Bodson, 2020).

Perhitungan Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan R_0 dihitung berdasarkan pendekatan *Next Generation Matrix* (NGM):

$$R_0 = \rho(-T\Sigma^{-1})$$

dengan T sebagai matriks transmisi dan Σ sebagai matriks transisi (Diekmann *et al.*, 2010; Driessche & Warmough, 2002).

HASIL DAN PEMBAHASAN**1) Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit**

Bebas penyakit artinya tidak ada kasus individu yang terinfeksi penyakit dalam suatu populasi. Sehingga, titik ekuilibrium bebas kasus infeksi diperoleh dengan menggantikan nilai $i = 0$ ke dalam persamaan (5), (6) dan (8).

1. Substitusi $i = 0$ ke dalam persamaan (6):

$$\begin{aligned}(1-p)\beta si - (\delta + \theta + \mu)e &= 0 \\ -(\delta + \theta + \mu)e &= 0 \\ e &= 0\end{aligned}\tag{9}$$

2. Substitusi nilai $i = 0$ ke dalam persamaan (8):

$$\begin{aligned}\gamma i - (\sigma + \mu)r &= 0 \\ -(\sigma + \mu)r &= 0 \\ r &= 0\end{aligned}\tag{10}$$

3. Ubah persamaan (5) dengan mensubstitusi nilai $e = i = r = 0$

$$\begin{aligned}\alpha - \beta si + \delta e + \sigma r - \mu s &= 0 \\ \alpha - \mu s &= 0 \\ \alpha &= \mu s \\ s &= \frac{\alpha}{\mu}\end{aligned}\tag{11}$$

Melalui sistem persamaan (9)-(11), dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit dari sistem berupa:

$$T_0 = (s, e, i, r) = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0\right)$$

2) Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium endemik merupakan kebalikan dari bebas penyakit, dimana $i > 0$. Dengan melakukan substitusi, diperoleh titik endemik sistem berupa:

$$T_E(s^*, e^*, i^*, r^*) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(\delta + \theta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_1)}{\beta[p(\delta + \mu) + \theta]}, \\ \frac{(1-p)(\gamma + \mu + \mu_1)(\sigma + \mu)(\alpha\beta[p(\delta + \mu) + \theta] - \mu(\delta + \theta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_1))}{\beta(p(\delta + \mu) + \theta)[(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \mu_1)[(\delta + \theta + \mu) - (1-p)\delta] - \sigma\gamma[p(\delta + \mu) + \theta]}}, \\ \frac{(\sigma + \mu)(\alpha\beta[p(\delta + \mu) + \theta] - \mu(\delta + \theta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_1))}{\beta[(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \mu_1)[(\delta + \theta + \mu) - (1-p)\delta] - \sigma\gamma[p(\delta + \mu) + \theta]}}, \\ \frac{\gamma(\alpha\beta[p(\delta + \mu) + \theta] - \mu(\delta + \theta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_1))}{\beta[(\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \mu_1)[(\delta + \theta + \mu) - (1-p)\delta] - \sigma\gamma[p(\delta + \mu) + \theta]} \end{array} \right\}$$

Dengan mengasumsikan nilai-nilai:

$$A = \alpha\beta[p(\delta + \mu) + \theta] - \mu(\delta + \theta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_1), \text{ dan}$$

$$B = (\sigma + \mu)(\gamma + \mu + \mu_1)[(\delta + \theta + \mu) - (1-p)\delta] - \sigma\gamma[p(\delta + \mu) + \theta].$$

Maka, titik ekuilibrium endemik yang diperoleh dapat ditulis kembali menjadi:

$$T_E(s^*, e^*, i^*, r^*) = \left(\frac{(\delta + \theta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_1)}{\beta[p(\delta + \mu) + \theta]}, \frac{(1-p)(\gamma + \mu + \mu_1)(\sigma + \mu)A}{\beta(p(\delta + \mu) + \theta)B}, \frac{(\sigma + \mu)A}{\beta B}, \frac{\gamma A}{\beta B} \right)$$

3) Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan R_0 diperoleh dengan melakukan linierisasi terlebih dahulu terhadap subpopulasi infeksi dan perubahan terkait infeksi. Oleh karena itu, hanya subpopulasi Exposed dan Infected dari sistem yang digunakan selama proses perhitungan R_0 dengan mendefinisikan fungsi:

$$f_1(e, i) = (1-p)\beta si - (\delta + \theta + \mu)e$$

$$f_2(e, i) = p\beta si + \theta e - (\gamma + \mu + \mu_1)i$$

Hasil linierisasi dari fungsi yang dibentuk kemudian diubah ke dalam suatu matriks K yang merupakan dekomposisi matriks Jacobian $J(e, i)$ untuk mendapatkan koefisien-koefisien matriks transisi dan transmisi sebagai berikut:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & (1-p)\frac{\beta\alpha}{\mu} \\ 0 & p\frac{\beta\alpha}{\mu} \end{pmatrix}, \quad -\Sigma = \begin{pmatrix} (\delta + \theta + \mu) & 0 \\ -\theta & (\gamma + \mu + \mu_1) \end{pmatrix}$$

Tahap selanjutnya adalah membentuk suatu *Next Generation Matrix* sehingga nilai R_0 diperoleh dengan mencari nilai eigen terbesar dari matriks K :

$$K = \begin{pmatrix} \frac{(1-p)\beta\alpha\theta}{\mu(\delta+\theta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_1)} & \frac{(1-p)\beta\alpha}{\mu(\gamma+\mu+\mu_1)} \\ \frac{p\beta\alpha\theta}{\mu(\delta+\theta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_1)} & \frac{p\beta\alpha}{\mu(\gamma+\mu+\mu_1)} \end{pmatrix}$$

Oleh karena itu, diperoleh nilai-nilai eigen berikut:

$$\lambda_1 = \frac{(1-p)\beta\alpha\theta}{\mu(\delta+\theta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_1)} \text{ dan } \lambda_2 = \frac{p\beta\alpha}{\mu(\gamma+\mu+\mu_1)}$$

Karena $\rho(K) = \max \left\{ \left| \frac{(1-p)\beta\alpha\theta}{\mu(\delta+\theta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_1)} \right|, \left| \frac{p\beta\alpha}{\mu(\gamma+\mu+\mu_1)} \right| \right\}$ maka nilai eigen dominan matriks K adalah:

$$R_0 = \frac{(1-p)\beta\alpha\theta}{\mu(\delta+\theta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_1)} + \frac{p\beta\alpha}{\mu(\gamma+\mu+\mu_1)}$$

4) Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit ISPA

Definisikan persamaan (1) hingga (4) sebagai:

$$f_1(s, e, i, r) = \alpha - \beta si + \delta e + \sigma r - \mu s \quad (12)$$

$$f_2(s, e, i, r) = (1-p)\beta si - (\delta + \theta + \mu)e \quad (13)$$

$$f_3(s, e, i, r) = p\beta si + \theta e - (\gamma + \mu + \mu_1)i \quad (14)$$

$$f_4(s, e, i, r) = \gamma i - (\sigma + \mu)r \quad (15)$$

Lalu lakukan linierisasi persamaan (12) hingga (15) dan susun dalam matriks Jacobian (J) hingga diperoleh:

$$(J) = \begin{bmatrix} -\beta i - \mu & \delta & -\beta s & \sigma \\ (1-p)\beta i & -(\delta + \theta + \mu) & (1-p)\beta s & 0 \\ p\beta i & \theta & p\beta s - (\gamma + \mu + \mu_1) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\sigma + \mu) \end{bmatrix}$$

5) Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium yang telah diperoleh dalam kondisi bebas penyakit, yakni $T_0 = (s, e, i, r) = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$ kemudian disubstitusi ke dalam matriks (J) sebagai berikut:

$$J(T_0) = \begin{bmatrix} -\mu & \delta & -\frac{\beta\alpha}{\mu} & \sigma \\ 0 & -(\delta + \theta + \mu) & \frac{(1-p)\beta\alpha}{\mu} & 0 \\ 0 & \theta & \frac{p\beta\alpha}{\mu} - (\gamma + \mu + \mu_1) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\sigma + \mu) \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks $J(T_0)$ dapat dicari melalui nilai eigen $\det [J(T_0) - \lambda I]$ dan ditemukan bahwa semua nilai eigen memiliki bagian riil tak nol. Hal ini menyebabkan titik ekuilibrium bebas penyakit tersebut hiperbolik dan terdapat setidaknya satu nilai eigen yang bernilai positif. Dalam artian, kondisi titik ekuilibrium saat $i = 0$ yang tidak stabil dapat menimbulkan keberadaan titik ekuilibrium endemik.

6) Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Dengan cara yang sama, titik endemik yang telah diperoleh sebelumnya kemudian disubstitusikan ke dalam matriks (J) sebagai berikut:

$$J(T_E^*) = \begin{bmatrix} -\frac{(\sigma+\mu)A}{B} - \mu & \delta & -\frac{(\delta+\theta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_1)}{p(\delta+\mu)+\theta} & \sigma \\ \frac{(1-p)(\sigma+\mu)A}{B} & -(\delta + \theta + \mu) & \frac{(1-p)(\delta+\theta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_1)}{p(\delta+\mu)+\theta} & 0 \\ \frac{p(\sigma+\mu)A}{B} & \theta & \frac{p(\delta+\theta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_1)}{p(\delta+\mu)+\theta} - (\gamma + \mu + \mu_1) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\sigma + \mu) \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama pula, nilai eigen dari matriks $J(T_E^*)$ dapat dicari melalui nilai eigen $\det [J(T_E^*) - \lambda I]$. Namun, karena hasil menunjukkan adanya polinomial berderajat tinggi, maka kriteria Routh-Hurwitz digunakan untuk efisiensi. Adapun Routh array yang terbentuk dari persamaan polinomial dalam sistem adalah:

Tabel 1. Routh array dari model SEIR penelitian

Variabel	Koefisien		
λ^4	a_4	a_2	a_0
λ^3	a_3	a_1	0
λ^2	b_1	b_2	0
λ^1	c_1	0	0
λ^0	d_1	0	0

Dalam Table 1 koefisien selain $a_{i=0,...,4}$ diperoleh melalui:

$$b_1 = \frac{a_2 a_3 - a_1}{a_3}$$

$$b_2 = \frac{a_0 a_3 - a_4(0)}{a_3} = a_0$$

$$c_1 = \frac{a_1 b_1 - a_3 b_2}{b_1} = \frac{a_1 a_2 a_3 - (a_1^2 + a_0 a_3^2)}{a_2 a_3 - a_1}$$

$$d_1 = \frac{b_2 c_1 - b_1(0)}{c_1} = b_2 = a_0$$

Karena $a_4 = 1 > 0$, maka koefisien pada kolom pertama haruslah positif seluruhnya. Sehingga diperoleh kriteria kestabilannya yaitu:

- i. $a_3 > 0$ jika $p_1 > 0$
- ii. $b_1 > 0$ jika $a_3 > 0$ dan $a_2 a_3 - a_1 > 0$
- iii. $c_1 > 0$ jika $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_0 a_3^2 > 0$
- iv. $d_1 > 0$ jika $a_0 > 0$

Ketika seluruh kriteria dapat terpenuhi, berarti semua nilai eigen bernilai negatif. Hal ini menunjukkan bahwa sistem tidak mengalami gangguan yang besar dari titik ekuilibrium endemik. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa keberadaan titik ekuilibrium endemik pada sistem bersifat stabil asimtotik.

7) Simulasi Numerik

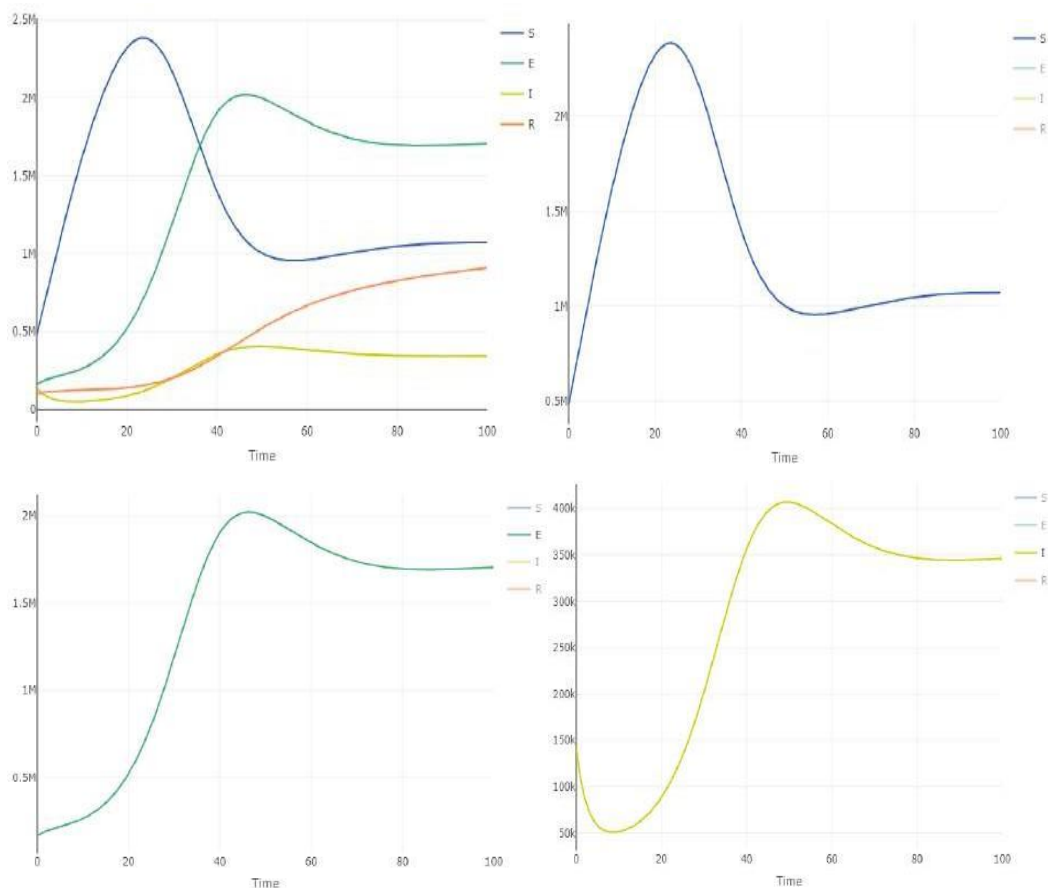
Simulasi numerik dilakukan untuk memberikan gambaran bagaimana model SEIR penyebaran ISPA ketika terdapat proporsi individu PJB. Angka dalam simulasi diambil melalui penelitian terdahulu oleh Nurazizah *et al.* (2024) dan data dari Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan tahun 2022. Berikut data variabel dan parameter yang akan digunakan:

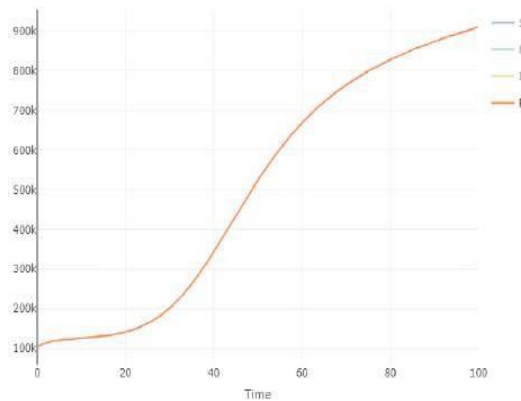
Tabel 2. Data simulasi numerik (Nurazizah *et al.*, 2024)

Variabel/Parameter	Jumlah/Nilai
$S(t)$	485.665 <i>individu</i>
$E(t)$	165.670 <i>individu</i>
$I(t)$	141.755 <i>individu</i>

$R(t)$	103.217 individu
$N(t)$	896.316 individu
α	0,17364
θ	0,07143
δ	0,0165
γ	0,072817
σ	0,01
μ	0,01409
μ_1	0,27183
β	0,42906

Simulasi numerik dalam penelitian ini dilakukan dengan menggunakan odin dan menghasilkan grafik sebagai berikut:





Gambar 2. Simulasi model SEIR penyebaran ISPA dengan proporsi PJB

Berdasarkan Gambar 2., hasil simulasi menunjukkan bahwa dinamika penyebaran ISPA dipengaruhi oleh perbedaan laju transisi antar subpopulasi. Subpopulasi rentan meningkat signifikan akibat tingginya laju kelahiran dan kesembuhan, sementara subpopulasi terinfeksi mengalami fluktuasi yang mencerminkan keberhasilan patogen dalam menembus sistem imun individu. Setelah mencapai puncak, jumlah individu terinfeksi menurun dan stabil akibat keseimbangan antara laju infeksi, kesembuhan, dan kematian. Sementara itu, subpopulasi sembuh terus bertambah seiring dengan perbaikan pola hidup.

8) Simulasi Bilangan Reproduksi Dasar

Berdasarkan nilai parameter, bilangan reproduksi dasar diperoleh sebesar:

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \frac{(1-p)\beta\alpha\theta}{\mu(\theta + \delta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_1)} + \frac{p\beta\alpha}{\mu(\gamma + \mu + \mu_1)} \\
 &= \frac{(1-0,0147)(0,42906)(0,17364)0,07143}{0,01409(0,07143 + 0,0165 + 0,01409)(0,072817 + 0,01409 + 0,27183)} \\
 &\quad + \frac{(0,0147)(0,42906)(0,17364)}{0,01409(0,072817 + 0,01409 + 0,27183)} \\
 R_0 &\approx 10,3848
 \end{aligned}$$

Hasil ini menggambarkan bahwa setiap kasus infeksi ISPA dapat menghasilkan lebih dari satu kasus baru, dengan lebih spesifik berarti satu individu terinfeksi dapat menularkan penyakit kepada sekitar 10 individu lain dalam populasi rentan selama masa infeksi individu tersebut. Dengan demikian, nilai dari $R_0 > 1$ menunjukkan bahwa penyakit ISPA berpotensi menyebar dengan sangat cepat.

9) Simulasi Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Nilai parameter yang digunakan menyebabkan titik ekuilibrium bebas penyakit model SEIR pada penelitian yang dilakukan bernilai:

$$T_0(s, e, i, r) = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0 \right) = \left(\frac{0,17364}{0,01409}, 0, 0, 0 \right) = (12,323633, 0, 0, 0)$$

Artinya, untuk setiap individu yang keluar dari subpopulasi rentan (dalam hal ini terjadi karena kasus kematian), maka terdapat sekitar 12 individu baru yang masuk ke dalam subpopulasi rentan.

10) Simulasi Titik Ekuilibrium Endemik

Dari hasil analisis titik ekuilibrium endemik diperoleh beberapa kriteria Routh-Hurwitz berdasarkan model SEIR pada penelitian yang terpenuhi sehingga titik ekuilibrium endemik disimpulkan bersifat stabil asimtotik. Adapun titik endemik yang muncul bernilai:

$$\begin{aligned} T_E(s^*, e^*, i^*, r^*) &= \left(\frac{(\delta+\theta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_1)}{\beta[p(\delta+\mu)+\theta]}, \frac{(1-p)(\gamma+\mu+\mu_1)(\sigma+\mu)A}{\beta(p(\delta+\mu)+\theta)B}, \frac{(\sigma+\mu)A}{\beta B}, \frac{\gamma A}{\beta B} \right) \\ &= (1,18669, 1,93979, 0,394471, 1,19237) \end{aligned}$$

Dari hasil simulasi titik endemik, menunjukkan bahwa sebanyak 39,4% individu dari total populasi dapat menularkan penyakit kepada individu lain. Karena diketahui titik ekuilibrium endemik bersifat stabil asimtotik, maka nilai ini tidak dapat berubah secara signifikan dari waktu ke waktu. Dalam pengertian lain, penyakit ISPA tetap berada dalam populasi dan tidak menghilang, namun telah mencapai kondisi stabil.

KESIMPULAN DAN SARAN**Kesimpulan**

Penelitian ini menunjukkan bahwa model SEIR yang memuat faktor kerentanan akibat penyakit jantung bawaan (PJB) memberikan gambaran realistis terhadap penyebaran ISPA di masyarakat. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit bersifat tidak stabil akibat adanya satu nilai eigen positif, yang mengindikasikan kemungkinan sistem berpindah ke kondisi akademik, sesuai dengan nilai $R_0 > 1$. Selanjutnya, analisis di sekitar titik ekuilibrium endemik menggunakan kriteria Routh-Hurwitz menghasilkan pemenuhan syarat kestabilan, yaitu seluruh koefisien pada kolom pertama Routh array bernilai positif.

Simulasi numerik memperkuat hasil analitik tersebut, di mana sekitar 39,4% individu dalam populasi dapat menularkan penyakit. Dalam konteks epidemiologi, hal ini mengindikasikan bahwa ISPA memiliki potensi tinggi untuk tetap endemik, terutama pada kelompok rentan seperti penderita PJB yang memiliki gangguan sistem imun dan fungsi respirasi, sehingga lebih mudah terinfeksi dan mempercepat transmisi penyakit dalam populasi.

Saran

Penelitian ini masih bersifat teoritis dengan asumsi populasi homogen dan belum mempertimbangkan intervensi medis seperti pengobatan, vaksinasi, atau isolasi pasien, yang dalam praktik kedokteran sangat krusial untuk memutus rantai penularan. Oleh karena itu, studi selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan model yang lebih kompleks dan aplikatif dengan memasukkan variabel intervensi kesehatan masyarakat, serta memanfaatkan perangkat lunak simulasi berbasis data epidemiologis terkini agar hasilnya lebih relevan dengan kondisi nyata dan dapat digunakan sebagai bahan pertimbangan dalam penyusunan kebijakan kesehatan publik.

DAFTAR PUSTAKA

- Bodson, M. (2020). Explaining the Routh-Hurwitz Criterion. *IEEE Control systems*, 40(February), 45-51.
- Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., & Roberts, M. G. (2010). The Construction of Next Generation Matrices for Compartmental Epidemic Models. *Journal of the Royal Society Interface*, 7(47), 873–885.
- Direktorat Promosi Kesehatan dan Pemberdayaan Masyarakat. (2023). *Mengenali Gejala ISPA dan Tindakan yang Perlu Dilakukan*. Ayosehat.Kemkes.Go.Id.
- Driessche, P. van den, & Watmough, J. (2002). Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, 180, 29–48.
- Hidayat, D. (2023). Kemenkes Catat Pengidap ISPA Meningkat Akibat Polusi Udara. *rri.co.id*.
- Irwan, M., Nurman, T. A., Muflihah, S., & Pathuddin, H. (2022). Analisis Dan Simulasi Penyakit Infeksi Saluran Pernapasan Akut Di Kabupaten Bulukumba Dengan Menggunakan Model Susceptible Exposed Infectious Recovered (SEIR). *Jurnal MSA (Matematika Dan Statistika Serta Aplikasinya)*, 10(1), 94–99.
- Ndii, M. Z. (2022). *Pemodelan Matematika*. PT. Nasya Expanding Management.

- Nurfadilah, Fardinah, & Hikmah. (2021). Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit ISPA. *Journal of Mathematics: Theory and Applications*, 3(1), 14–22.
- Sadono, R. K., & Soetadji, A. (2013). Perbedaan Kejadian Ispa Pada Anak Dengan Penyakit Jantung Bawaan Sianotik Dan Asianotik Jurnal Media Medika Muda. *Jurnal Media Medika Muda*, 1–10.
- Sulisti, H., Noviani, E., & Kusumastuti, N. (2014). Analisis Kestabilan Model Dinamika Penyebaran Penyakit Flu Burung. *03(3)*, 235–244.
- WHO. (2007). Pencegahan dan Pengendalian Infeksi Saluran Pernapasan Akut (ISPA) yang Cenderung menjadi Pandemi dan Pandemi di Fasilitas Pelayanan Kesehatan. *WHO Interim Guidelines*.
- Wilar, R., & Wantania, J. M. (2006). Beberapa Faktor yang Berhubungan dengan Episode Infeksi Saluran Pernapasan Akut pada Anak dengan Penyakit Jantung Bawaan. *Sari Pediatri*, 8(2), 154–158.