Jurnal Inovasi Pendidikan, **Vol 6, No. 3**
https://journalversa.com/s/index.php/jip **Agustus 2024**

ANALISIS PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR TINGKAT SATU MELALUI METODE LAGRANGE DAN METODE BERNOULLI

Indah Aulia Pratiwi[1], Raysah Puteri Sulaiman[2], Septi Agita Tarigan[3], Siti Sarah[4], Yonata Hutapea[5], Elfitra[6]
[1,2,3,4,5,6]Universitas Negeri Medan
Email: indahaulia478@gmail.com[1], raysahputeri2506@gmail.com[2], septitarigan28@gmail.com[3], sasarahhj0004@gmail.com[4], yonatahutapea@gmail.com[5], elfitra@unimed.ac.id[6]

Abstrak: Persamaan diferensial linear Tingkat I (PDLTI) merupakan persamaan diferensial (PD) dengan bentuk umum $y' + p(x)y = q(x)$. Persamaan diferensial tersebut umumnya diselesaikan dengan menggunakan metode-metode seperti metode faktor integral, metode Lagrange, dan metode Bernoulli. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis keterkaitan antara metode Lagrange dan metode Bernoulli dalam menyelesaikan permasalahan PDLTI. Penelitian ini termasuk jenis studi Pustaka, dengan sumber data dari buku, artikel, dan artikel web. Data dikumpulkan dengan cara membaca bahan kepustakaan dan membuat catatan penelitian. Hasil analisis menunjukkan bahwa kedua metode ini sejatinya mengarah ke metode faktor integral, hanya saja proses mendapatkan bentuk faktor integralnya berbeda. Pada metode faktor integral, fungsi faktor integral langsung diasumsikan sejak langkah petama, yaitu sebuah fungsi yang berbentuk $e^{\int P(x)dx}$, kemudian fungsi tersebut dikalikan pada kedua ruas PDLTI sehingga diperoleh solusi umumnya. Sedangkan pada metode Lagrange dan metode Bernoulli bentuk $e^{\int P(x)dx}$ dicari terlebih dulu menggunakan asumsi-asumsi masing-masing metode.
Kata Kunci: Metode Lagrange, Metode Bernoulli, Persamaan Diferensial Linear Tingkat Satu.

Abstract: *Level I linear differential equations (PDLTI) are differential equations (PD) with the general form* $y' + p(x)y = q(x)$. *These differential equations are generally solved using methods such as the integral factor method, Lagrange method, and Bernoulli method. This research aims to analyze the relationship between the Lagrange method and the Bernoulli method in solving PDLTI problems. This research is a type of library study, with data sources from books, articles and web articles. Data was collected by reading library materials and making research notes. The analysis results show that these two methods actually lead to the integral factor method, only the process of obtaining the integral factor form is different. In the integral factor method, the integral factor function is directly assumed from the first step, namely a function in the form* $e^{\int P(x)dx}$, *then this function is multiplied on both sides of PDLTI to obtain the general solution. Meanwhile, in the Lagrange method and Bernoulli method, the form* $e^{\int P(x)dx}$ *is first searched using the assumptions of each method.*
Keywords*: Lagrange Method, Bernoulli Method, First Degree Linear Differential Equations.*

PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu ilmu dasar dalam dunia pendidikan yang digunakan untuk menunjang ilmu-ilmu lain seperti ilmu fisika, kimia, komputer, dan lain-lain. Matematika bukan hanya alat bantu untuk matematika itu sendiri, tetapi banyak konsep-konsepnya yang sangat diperlukan oleh ilmu lainnya. Matematika juga memegang peranan penting dalam kehidupan manusia. Kebermaknaan konsep-konsep matematika tampak jelas ketika digunakan dalam memecahkan masalah sains, teknologi dan kehidupan sehari-hari.

Suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau beberapa fungsi yang tidak diketahui disebut persamaan diferensial (Yuliani, Deswita, Agusni, 2015). Persamaan diferensial memuat konsep turunan dan integral dimana sebelumnya mahasiswa sudah mendapatkan konsep ini pada mata kuliah kalkulus diferensial dan kalkulus integral. Ketika mahasiswa sudah menguasai konsep turunan dan integral mereka dapat menentukan cara yang tepat dalam menyelesaikan soal yang dikerjakan. Dan sebaliknya jika mahasiswa tidak dapat menguasai pemahaman konsep pada materi turunan dan integral akan terjadinya kemungkinan lebih besar kesalahan dalam penyelesaiannya. Sehingga di dalam matematika pemahaman menjadi unsur yang mendasar untuk mempelajari matematika secara bermakna. Permendiknas Nomor 22 Tahun 2006 menyebutkan salah satu kemampuan yang penting dalam pembelajaran matematika adalah kemampuan pemahaman konsep matematis (Gusmania & Agustyaningrum, 2020).

Sebarang persamaan dengan yang tidak diketahui berupa suatu fungsi dan mencakup derivatif (atau diferensial) dari fungsi yang tidak diketahui tersebut dinamakan persamaan diferensial. Persamaan diferensial (PD) memiliki peran penting dalam pengembangan ilmu sains dan teknologi. Banyak permasalahan dalam ilmu sains dan teknologi yang butuh terhadap pendeskripsian dari kuantitas-kuantitas yang dapat di ukur (posisi, temperatur, populasi, dan lain-lain) sebagai fungsi dari waktu (Andkins, 2012). Beberapa contoh PD yang terkenal diantaranya adalah hukum pendinginan Newton dalam Termodinamika, hukum panas dalam Termoninamika, persamaan gelombang, dan masih banyak lagi (Adkins, 2012). Persamaan diferensial secara umum terbagi menjadi dua jenis, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial (Adkins, 2012). Olver (2014) menyebutkan bawa sebuah persamaan diferensial dikatakan biasa apabila fungsi tidak diketahui bergantung pada hanya satu variabel dan disebut parsial apabila bergantung pada lebih dari satu variabel.

Salah satu jenis PD biasa yang dibahas dalam perkuliahan adalah PD linear tingkat satu (PDLT1), yakni PD yang memiliki bentuk umum $y' + p(x)y = q(x)$ dimana $p(x)$ dan $q(x)$ adalah fungsi yang hanya terdiri dari variabel x saja (Adkins, 2012). PD tersebut sering diselesaikan melalui metode faktor integral, yaitu dengan memilih suatu fungsi yang dapat menjadikan PDLT1 dapat diintegralkan (*integrable*) (Mukhkamar, 2021). Selain metode faktor integral, PDLT1 dapat pula diselesaikan melalui metode-metode lain, diantaranya adalah metode Lagrange dan metode Bernoulli (Bale, 1993). Metode Lagrange adalah metode yang sejatinya digunakan untuk menemukan solusi dari PD Linear tingkat n secara general (Bale, 1993), sedangkan metode Bernoulli adalah suatu metode yang sejatinya digunakan oleh Johann Bernoulli untuk menyelesaikan PD Bernoulli (Parker, 2020)

Berdasarkan pengamatan peneliti, karya-karya ilmiah yang membahas keterkaitan antara metode Lagrange dan metode Bernoulli dalam menyelesaikan PDLT1 masih sangat minim. Hal ini menyulitkan mahasiswa yang ingin mengkaji lebih dalam mengenai keterkaitan antara dua metode ini dalam mencari literatur ilmiah. Pengkajian mendalam mengenai kaitan antara metode Lagrange dan metode Bernoulli dalam menyelesaikan PDLT1 tentunya dapat memperkuat/memperdalam pemahaman mahasiswa mengenai konsep dasar metode Lagrange dan metode Bernoulli. Berdasarkan hal itu, maka dalam penelitian ini peneliti tertarik untuk mencoba menganalisis penyelesaian persamaan diferensial linear tingkat satu melalui metode Lagrange dan metode Bernoulli. Rumusan masalah pada penelitian ini adalah "bagaimana hubungan metode Lagrange dan metode Bernoulli dalam menyelesaikan persamaan diferensial linear tingkat satu?"

TINJAUAN PUSTAKA

Metode Lagrange

Bale (1993) menjabarkan penyelesaian PD linear tingkat n melalui metode Lagrange sebagai berikut:

Misalkan suatu PD berbentuk

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_0(x)y = q(x)$$

memiliki himpunan fundamental $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, artinya himpunan penyelesaian dari PD linear homogen tereduksi (pada saat $q(x) = 0$) adalah

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

dimana $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah skalar (konstanta).

1. Asumsikan $c1, c2, \dots, cn$ adalah fungsi dari x, yakni $c1 = u_1(x)$, $c2 = u_2(x)$, … , $cn = u_n(x)$ dan asumsikan solusi partikular dari PD tersebut adalah

$$y_p = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) y_i(x)$$

2. Asumsikan

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(x) y_i^{(j)}(x), \ \ j = 0,1,\dots,n-2$$

Selanjutnya, dengan menerapkan turunan secara berurutan serta menerapkan asumsi 2, diperoleh

$$y_p^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) y_i^{(j)}(x), \ \ j = 0,1,\dots,n-1$$

Selanjutnya turunan terakhir dari y_p, yaitu $y_p^{(j)}$ adalah

$$y_p^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} u'_i(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} u_i(x) y_i^{(n)}(x)$$

Substitusikan y_p, y'_p, … $y'^{(n-1)}_p$, dan $y_p^{(n)}$ kedalam PD awal serta dengan memperhatikan bahwa $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ adalah himpunan fundamental, diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} u'_i(x) y_i^{(n)}(x), = q(x)$$

Dari asumsi 2 dan persamaan terakhir diperoleh:

$$u'_i(x) = \frac{w(x)}{w(x)}, i = 1,2,\dots,n.$$

dimana $wi(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1,2, \dots, n$ adalah determinan dari matriks Wronskian dari sistem fundamental $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ dimana kolom ke-i dari matriks tersebut diganti dengan (0,0, … , $q(x)$). Sehingga bisa diperoleh solusi partikular, y_p, yaitu

$$y_p = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \frac{w_i(x)}{w(x)} dx$$

Jadi, himpunan penyelesaian umum (HPU) dari PD linear tingkat-n adalah

$$y = y_p + y_h = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \frac{w_i(x)}{w(x)} dx + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

dimana, $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah skalar (konstantan).

Metode Bernoulli

Parker (2020) menjabarkan penyelesaian PD Bernoulli melalui metode Bernoulli sebagai berikut: Misalkan suatu PD berbentuk

$$ady = yp(x)dx + bq(x)y^n dx$$

dimana a dan b adalah suatu konstanta. Untuk $a = -1$ dan $b = -1$, persamaan tersebut merupakan PD Bernoulli, yaitu

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

(untuk menyederhanakan notasi, variabel x dalam $y(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $m(x)$, dan $z(x)$ akan dihilangkan untuk sementara dengan tetap menganggap bahwa mereka adalah fungsi dari x) Misalkan $y = mz$ dimana m dan z adalah suatu fungsi dalam x, sehingga $dy = mdz + zdm$. Substitusi hasil-hasil tersebut ke PD awal diperoleh

$$amdz + azdm = pmzdx + bqm^n z^n dx$$

Dari persamaan ini dapat diperoleh

$$aZdm = pmzdx$$

$$\frac{a}{z}dz = pdx$$

$$\int \frac{a}{z}dz = \int pdx$$

Selanjutnya, karena p adalah fungsi dari x, maka bentuk dari fungsi z akan selalu dapat ditemukan sebagai fungsi dari x pula, sebutlah penyelesaiannya $z = Z$, dimana Z adalah suatu fungsi dari x saja. Selanjutnya, jika disubstitusikan fungsi $z = Z$ ke persamaan semula maka akan peroleh $amdZ - mZdx = 0$, sehingga yang tersisa adalah

$$aZdm = bQm^n z^n dx$$

Substitusi $z = Z$ ke persamaan tersebut diperoleh

$$aZdm = bqm^n z^n dx$$

$$\frac{a}{m^n}dm = bqZ^n dx$$

$$\int am^{-n}d, = b\int qZ^{n}dx$$

Karena q dan Z merupakan fungsi dari x saja, maka bentuk dari fungsi m akan selalu dapat ditemukan sebagai fungsi dari x pula, yaitu dalam bentuk

$$\frac{a}{-n+1}m^{-n-1} + c = b\int aZdx$$

Sebutlah bentuk fungsi m yang diperoleh dari persamaan terakhir sebagai M, yakni m = M dimana M adalah suatu fungsi dari x saja. Akhirnya, karena y = mz dan bentuk dari fungsi m dan z sudah ditemukan, maka HPU dari PD

$$ady = pydx + bqy^{n}dx$$

adalah y = MZ.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan peneliti sebagai instrumen utama (Darmalaksana, 2020). Jenis penelitian ini adalah penelitian studi pustaka. Penelitian dilakukan di Prodi Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan dengan memanfaatkan sumber data berupa buku-buku referensi dan artikel-artikel ilmiah.

Pengumpulan data studi pustaka dilakukan dengan membaca bahan kepustakaan (sumber data), kemudian membuat catatan penelitian. Bahan kepustakaan yang dikumpulkan peneliti dari tempat penelitian berupa 7 buku, 3 artikel di jurnal ilmiah, dan 2 artikel di website yang berkaitan dengan Persamaan Diferensial. Data yang diperoleh dari bahan-bahan kepustakaan tersebut adalah penjabaran penyelesaian Persamaan Diferensial Linear Tingkat 1 melalui metode Lagrange dan metode Bernoulli.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Selesaikan PD $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

Penyelesaian :

$P(x) = \frac{2}{x+1}$ dan $Q(x) = (x+1)^3$.

Ambil $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = 0$, dapat ditulis menjadi

$\frac{dy}{y} - \frac{2}{x+1}dx = 0$.

Dengan pengintegralan maka diperoleh

$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{2}{x+1} dx = 0$

$\ln y - 2\ln(x+1) = \ln c$

$y = c(x+1)^2.$

Pandang c sebagai fungsi dari x, yakni $y = c(x)(x+1)^2$.

Diferensialkan terhadap x, diperoleh

$\frac{dy}{dx} = c'(x)(x+1)^2 + 2c(x)(x+1).$

Substitusikan pada PD, sehingga diperoleh

$c'(x)(x+1)^2 + 2c(x)(x+1) - \frac{2}{x+1} c(x)(x+1)^2 = (x+1)^3$

$c'(x)(x+1)^2 = (x+1)^3$

$c'(x) = x + 1$

Dengan demikian,

$c(x) = \int (x+1)dx = \frac{1}{2}x^2 + x + k.$

Jadi jawab PD $y = (x+1)^2 \left(\frac{1}{2}\, x^2 + x + k\right)$ atau, jawab PD dengan menggunakan rumus,

$y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx + C\right\}.$

Dimana $Q(x) = (x+1)^3$ dan $P(x) = -\frac{2}{x+1}$.

Perhatikan bahwa

$\int P(x)dx = -2\ln|x+1| = \ln|x+1|^{-2}.$

Jadi jawab PD

$y = e^{-\ln|x+1|^{-2}}\left\{\int (x+1)^3\, e^{\ln|x+1|^{-2}} dx + k\right\}$

$y = (x+1)^2\{\int (x+1)^3(x+1)^{-2}\, dx + k\}$

$y = (x+1)^2\{\int (x+1)\, dx + k\}$

$y = (x+1)^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + x + k\right).$

Metode Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Atau

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Dari PD $y' + P(x)y = Q(x)$, misalkan y = u.v, di mana u dan v fungsi dari x. Maka $y' = u'v + uv'$

PD menjadi

$u'v + uv'$+ P(x) uv = Q(x)

Atau

v $(u' + P(x)u)$ + uv' = Q(x)

Ambil u' + P(x) u = 0, maka uv' = Q(x), sehingga

$\frac{u'}{u} = -P(x)$

$\frac{\frac{du}{dx}}{u} = -P(x)$

$\frac{du}{dx} = -P(x)(u)$

Dengan Pengintegralan diperoleh,

$\int \frac{du}{u} = \int -P(x)dx$

ln u = $\int -P(x)dx$

u = $e^{-\int P(x)dx}$

Dari uv'= Q(x) atau $v' = \frac{Q(x)}{u}$, diperoleh

v'= Q(x) $e^{\int P(x)dx}$

Akibatnya,

v = $\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}dx + C_1$

Sehingga jawab PD adalah :

y = uv = $e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\}$

Contoh metode Bernoulli:

Penyelesaian PD $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$. Dengan metode Bernoulli adalah sebagai berikut:

Misalkan $y = uv$ di mana u dan v fungsi dari x , maka

$y' = u'v + uv'$ sehingga PD menjadi

$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}uv' = (x+1)^3$ atau

$v\left(u' - \frac{2}{x+1}u\right) + uv' = (x+1)^3$

Ambil $\left(u' - \frac{2}{x+1}u\right) = 0$, maka $uv' = (x+1)^3$ sehingga

$u' = \frac{2}{x+1}u$

$\frac{u'}{u} = \frac{2}{x+1}$

$\frac{\frac{du}{dx}}{du} = \frac{2}{x+1}$

$\frac{du}{u} = \frac{2}{x+1}dx$

Dengan Teknik pengintegralan diperoleh

$\int \frac{du}{u} = \int \frac{2}{x+1}dx$

$\ln u = \ln(x+1)^2$

$u = (x+1)^2$

Dari $uv' = (x+1)^3$, diperoleh

$(x+1)^2 v' = (x+1)^3$

$v' = (x+1)$

$v = \int (x+1)dx$

$v = \frac{1}{2}x^2 + x + c$

Sehingga penyelesaian umum PD tersebut adalah

$y = uv$

$y = (x+1)^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + x + c\right)$

Berdasarkan penjabaran di atas terlihat bahwa kedua metode ini sejatinya mengarah ke metode faktor integral, hanya saja proses mendapatkan bentuk faktor integralnya berbeda. Pada metode faktor integral, fungsi faktor integral langsung diasumsikan sejak langkah petama, yaitu sebuah fungsi yang berbentuk $e^{\int P(x)dx}$, kemudian fungsi tersebut dikalikan pada kedua ruas PDLT1 sehingga diperoleh solusi umumnya (Suprihatin, 2013). Sedangkan pada metode Lagrange dan metode Bernoulli bentuk $e^{\int P(x)dx}$ dicari terlebih dulu menggunakan asumsi-asumsi masing-masing metode.

Pada metode lagrange, dilakukan pengintegralan pada sisi kiri persamaan diferensial linear orde 1 yaitu $\int \frac{dy}{y} + \int P(x)dx = 0$ sehingga diperoleh $y = ce^{-\int P(x)dx}$. Selanjutnya ditentukan turunan dari fungsi tersebut dengan memandang c sebagai fungsi dari x yang akan disubstitusikan ke persamaan awal sebagai nilai dari $\frac{dy}{dx}$ sehingga dapat ditentukan penyelesaian persamaan diferensial tersebut yaitu $y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\}$. Sedangkan metode bernoulli, mengasumsikan bahwa solusi umum y sebagai perkalian dari dua buah fungsi yaitu y = u.v, di mana u dan v fungsi dari x. Langkah pertama dilakukan dengan memasukkan nilai dari y' yaitu $y' = u'v + uv'$ kedalam PD sehingga menjadi $u'v + uv'$+ P(x) uv = Q(x) atau v $(u' + P(x)u)$ + uv' = Q(x). Lalu, diambil u' + P(x) u = 0, maka uv' = Q(x). Pada u' + P(x) u = 0, diperoleh $\frac{du}{dx} = -P(x)(u)$ dan diintegralkan menjadi u = $e^{-\int P(x)dx}$. Dari uv'= Q(x) diperoleh v = $\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}dx + C_1$. Setelah menemukan nilai u dan v, maka dapat ditentukan penyelesaian persamaan diferensial tersebut yaitu $y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\}$.

Di era modern ini, metode faktor integral paling sering digunakan sebagai metode utama untuk menyelesaikan persamaan diferensial (PD) linear tingkat satu dibandingkan metode lainnya (Parker, 2013). Namun, metode Lagrange dan metode Bernoulli tetap perlu diajarkan kepada mahasiswa agar memotivasi mahasiswa untuk mengetahui metode tersebut dan memahami kelebihan dan kekurangan dari kedua metode tersebut (Parker, 2013). Ilmu pengetahuan berkembang dengan menggabungkan berbagai teknik menjadi teori yang terstruktur (Ince, 1994). Teknik-teknik seperti pemisahan variabel, substitusi, faktor integral, dan lain-lain perlu diajarkan kepada mahasiswa untuk memahami teknik-teknik lanjutan lainnya yang lebih kompleks (Katz, 1993).

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa metode Lagrange dan metode Bernoulli, kedua metode ini sejatinya mengarah ke metode faktor integral, hanya saja proses mendapatkan bentuk faktor integralnya berbeda. Pada metode faktor integral, fungsi faktor integral langsung diasumsikan sejak langkah petama, yaitu sebuah fungsi yang berbentuk $e^{\int P(x)dx}$, kemudian fungsi tersebut dikalikan pada kedua ruas PDLT1 sehingga diperoleh solusi umumnya (Suprihatin, 2013). Sedangkan pada metode Lagrange dan metode

Bernoulli bentuk $e^{\int P(x)dx}$ dicari terlebih dulu menggunakan asumsi-asumsi masing-masing metode.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, A. A., & Mark G. D. (2012). *Ordinary differential equations*. New York: Spinger Science+Business Media New York.

Agustyaningrum, N., dan Gusmania, Y. 2017. Praktikalitas dan Keefektifan Modul Geometri Analitik Ruang Berbasis Konstruktivisme. *Jurnal Dimensi*, 6(3), 412–420

Bale, Y. (1993). *Persamaan diferensial*. Aceh: Unknown Penerbit.

Darmalaksana, W. (2020). *Metode penelitian kualitatif studi pustaka dan studi lapangan*. Bandung: UIN Sunan Gunung Djati.

Ince, E. L. (1944). *Ordinary differential equations*. New York: Dover Publicatios.

Katz. V. J. (1993). *A history of mathematics*. New York: Harper Collins.

Mukhkamar, J. (2021). *Integrating factor*. Didapat dari MathWorld-A Wolfeam Web Resource website: https://mathworld.wolfram.com/IntegratingFactor.html

Olver, P. J. (2014). *Introduction to partial differential equations*. Switzerland: Spinger International Publishing Switzerland.

Parker, A. E. (2020). Solving linear first-order differential equations bernoulli's (almost) variation of parameters method. Didapat dari Ursinus College website: https://digitalcommons.ursinus.edu/triumphs_differ/3

Parker, A.E. (2013). Who solved the bernoulli differenntial equation and how did they do it? *College Mathematics Journal*, 44(2), 89-97.

Suprihatin, B., dkk. (2013). *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta: CV ANDI OFFSET.

Yuliani, Deswita, Agusni., 2015. Konsep Metode Iterasi Variasional. *JOM FMIPA*, 2(1), 379 – 386.