JURNAL PENDIDIKAN KREATIVITAS PEMBELAJARAN
https://journalversa.com/s/index.php/jpkp

Volume 07, No. 2, April 2025

APLIKASI INTEGRAL LIPAT DUA DALAM PERHITUNGAN LUAS DAN VOLUME PADA GEOMETRI RUANG (TABUNG)

Novaria Br Saragih[1], Lauren Teresia Tamba[2], Nia Elovani Munthe[3], Jadata Dompak Ambarita[4], Alfidorino Flapianus Bukit[5]
[1,2,3,4,5]Universitas Negeri Medan
novariasaragih5@gmail.com[1], laurenteresiatamba@gmail.com[2], elovaninia@gmail.com[3], jadata.ambarita@gmail.com[4], alfidorinoflapianusbukit@gmail.com[5]

ABSTRACT; *Double integrals play an important role in calculating the area and volume in spatial geometry, especially in the shape of a cylinder. This study aims to analyze the application of double integrals in determining the surface area and volume of a cylinder using an experimental approach and literature study. The research method used includes two main stages: first, a literature study is conducted by reviewing the concept of double integrals in various mathematical and physical references to understand their theoretical basis. Second, an experimental method is applied through numerical simulations and calculations based on double integrals to calculate the surface area, total surface area, and volume of the cylinder. The results of the study indicate that double integrals can be used effectively to calculate the geometric elements of a cylinder with results that are in accordance with conventional methods. In addition, an experimental approach through mathematical software strengthens the accuracy of the calculation results. Thus, this study confirms that double integrals are a powerful tool in spatial geometry analysis and can be applied in various fields of science and engineering.*
Keywords: *Double Integral, Space Geometry, Cylinder, Surface Area, Volume, Experimental Method, Literature Study.*

ABSTRAK; Integral lipat dua memiliki peran penting dalam perhitungan luas dan volume dalam geometri ruang, khususnya pada bentuk tabung. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis penerapan integral lipat dua dalam menentukan luas permukaan serta volume tabung menggunakan pendekatan eksperimental dan studi literatur. Metode penelitian yang digunakan mencakup dua tahap utama: pertama, studi literatur dilakukan dengan meninjau konsep integral lipat dua dalam berbagai referensi matematika dan fisika untuk memahami dasar teoritisnya. Kedua, metode eksperimental diterapkan melalui simulasi numerik dan perhitungan berbasis integral lipat dua untuk menghitung luas selimut, luas permukaan total, dan volume tabung. Hasil penelitian menunjukkan bahwa integral lipat dua dapat digunakan secara efektif untuk menghitung elemen geometri tabung dengan hasil yang sesuai dengan metode konvensional. Selain itu, pendekatan eksperimental melalui perangkat lunak matematika memperkuat keakuratan hasil perhitungan. Dengan demikian, penelitian ini menegaskan bahwa integral lipat dua merupakan alat yang kuat dalam analisis geometri ruang dan dapat diterapkan dalam berbagai bidang sains dan teknik.

Kata Kunci: Integral Lipat Dua, Geometri Ruang, Tabung, Luas Permukaan, Volume, Metode Eksperimental, Studi Literatur.

PENDAHULUAN

Integral lipat dua merupakan salah satu konsep dalam kalkulus multivariabel yang memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang, termasuk geometri ruang. Integral ini digunakan untuk menghitung luas permukaan dan volume suatu objek dalam ruang tiga dimensi. Salah satu bentuk geometri yang dapat dianalisis menggunakan integral lipat dua adalah tabung. Dalam matematika, tabung adalah bangun ruang yang memiliki dua lingkaran sejajar sebagai alas dan sisi selimut yang berbentuk persegi panjang ketika dibuka dalam koordinat dua dimensi. Secara matematis, integral lipat dua dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\iint \mathrm{D} f(x, y) dA$$

di mana D adalah daerah dalam bidang dua dimensi tempat fungsi $f(x, y)$ didefinisikan. Untuk menghitung luas permukaan tabung menggunakan integral lipat dua, kita dapat memisahkan perhitungannya menjadi dua bagian utama: luas alas dan luas selimut. Jika tabung memiliki jari-jari $\bar{r}$ dan tinggi $\bar{h}$, maka luas alasnya dapat dihitung sebagai:

$$\mathrm{Aalas} = \iint \mathrm{D} dA = \iint \mathrm{D} 1 dA$$

Karena alas berbentuk lingkaran dengan jari-jari $\bar{r}$ daerah D lam koordinat polar adalah $0 \leq r \leq R$ dan $0 \leq \theta \leq 2\pi$ sehingga luasnya diperoleh dari integral:

$$\mathrm{Aalas} = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} r dr d\theta \ = \pi R2$$

Untuk luas selimut tabung, kita menggunakan koordinat silinder dengan parameterisasi $x = R \cos \theta, y = R \sin \theta$, dan z sebagai variabel tinggi. Luas selimut dapat dihitung dengan integral lipat dua sebagai:

$$\mathrm{Aselimut} = \int_0^{h} \int_0^{2\pi} R d\theta dz = 2\pi R h$$

Selain luas, volume tabung juga dapat dihitung menggunakan integral lipat dua yang diperluas menjadi integral lipat tiga:

$$V = \iiint_T dV.$$

Dalam koordinat silinder, volume dapat dievaluasi dengan batas $0 \leq r \leq R, 0 < \theta < 2\pi$ dan $0 \leq z \leq h$ sehingga integralnya menjadi:

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta dz = \pi R2h.$$

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji lebih lanjut aplikasi integral lipat dua dalam menghitung luas permukaan dan volume tabung melalui pendekatan analitis dan eksperimental. Metode analitis dilakukan dengan menyusun ulang perhitungan integral lipat dua dalam berbagai koordinat, sedangkan metode eksperimental melibatkan simulasi numerik dengan perangkat lunak matematika untuk memverifikasi hasil perhitungan. Studi ini diharapkan dapat memberikan pemahaman lebih dalam mengenai aplikasi integral lipat dua dalam geometri ruang serta menjadi referensi bagi pengembangan metode numerik dalam kalkulus multivariabel.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan dua pendekatan utama dalam menganalisis penerapan integral lipat dua dalam perhitungan luas dan volume tabung, yaitu studi literatur dan eksperimen numerik. Metode studi literatur dilakukan dengan mengumpulkan dan menganalisis berbagai referensi terkait konsep integral lipat dua serta aplikasinya dalam geometri ruang, termasuk buku kalkulus multivariabel, jurnal ilmiah, dan penelitian sebelumnya yang membahas metode integral dalam perhitungan luas permukaan serta volume. Studi ini bertujuan untuk memahami teori dasar integral lipat dua, teknik perubahan koordinat (kartesian ke silinder), serta penerapannya dalam objek berbentuk tabung. Dari studi literatur ini, dirumuskan model matematika integral lipat dua yang digunakan untuk menghitung luas permukaan dan volume tabung sebagai dasar dalam perhitungan analitis dan eksperimen numerik. Eksperimen dilakukan melalui dua tahap utama, yaitu perhitungan analitis dan simulasi numerik. Perhitungan analitis dilakukan dengan menyusun ulang integral lipat dua dalam koordinat kartesian dan silinder guna memperoleh hasil teoretis yang menjadi acuan dalam verifikasi hasil numerik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

a) Hasil Penelitian

Pada bagian ini, akan dibahas bagaimana integral lipat dua diterapkan dalam menghitung luas permukaan dan volume tabung menggunakan metode analitis serta validasi dengan metode numerik. Pembahasan ini mencakup perhitungan luas alas, luas selimut, luas permukaan total, serta volume tabung

1. Perhitungan Luas Permukaan Tabung Menggunakan Integral Lipat Dua : Luas permukaan tabung terdiri dari dua bagian utama: dua alas berbentuk lingkaran dan selimut tabung berbentuk persegi panjang ketika dibuka.

a. Luas Alas Tabung : Setiap alas berbentuk lingkaran dengan jari-jari R. Untuk menghitung luas alas, digunakan integral lipat dua dalam koordinat polar $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta})$ sebagai berikut:

$$\text{Aalas} = \iint_D dA$$

Dalam koordinat polar, elemen luas diferensial diberikan oleh $dA = r\,dr\,d\theta d$. Dengan batas integral:

- $0 \leq r \leq R$ (dari pusat ke tepi lingkaran)
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$(mengelilingi lingkaran)

Maka, integralnya menjadi:

$$\text{Aalas} = \int_0^{2\pi} \int_O^{R} rdrd\theta$$

Menyelesaikan integral bagian dalam:

$$\int_0^{R} r\,dr = \frac{1}{2} R^2$$

Kemudian, menyelesaikan integral bagian luar:

$$\int_0^{R} \frac{1}{2} R^2 d\theta = \frac{1}{2} R^2 (2\pi) = \pi R^2$$

Sehingga luas selimut adalah:

$$\text{Aselimut} = 2\pi Rh$$

b. Luas Selimut Tabung : Selimut tabung dapat dianggap sebagai persegi panjang dengan panjang $\mathbf{2\pi R2}$ (keliling lingkaran) dan tinggi hhh. Untuk menghitung luasnya menggunakan integral lipat dua, kita gunakan koordinat silinder dengan batas:

- $0 \leq r \leq R$ (dari pusat ke tepi lingkaran)
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$(mengelilingi lingkaran)

Luas selimut diberikan oleh:

$$\text{Aselimut} = \int_0^h \int_O^{2\pi} R \, d\theta \, dz$$

Menyelesaikan integral bagian dalam:

$$\int_0^h 2\pi \, R \, dz = 2\pi Rh$$

Sehingga luas selimut adalah:

$$\text{Aselimut} = 2\pi Rh$$

c. Luas Permukaan Total Tabung: Luas permukaan total tabung merupakan jumlah dari luas alas dan luas selimut, yaitu:

$$\text{Atotal} = \text{Atotal\_alas} + \text{Aselimut}$$

$$\text{Atotal} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$$

Fungsi ini menunjukkan bahwa luas permukaan tabung bergantung pada jari-jari R dan tinggi h

2. Perhitungan Volume Tabung Menggunakan Integral Lipat Dua : Volume tabung dapat dihitung menggunakan integral lipat tiga karena kita mempertimbangkan elemen volume diferensial dV. Dalam koordinat silinder, volume tabung diberikan oleh:

$$V = \iiint dV$$

Karena $V = r \, dr \, d\theta \, dz$, maka dengan batas:

- $0 \leq r \leq R$
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- $0 \leq z \leq h$

Integral yang digunakan adalah:

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta dz$$

Menyelesaikan integral bagian dalam:

$$\int_0^R r\, dr = \frac{1}{2} R^2$$

Kemudian, integral bagian tengah:

$$\int_0^R \frac{1}{2} R^2 d\theta = \frac{1}{2} R^2 (2\pi) = \pi R^2$$

Terakhir, integral bagian luar:

$$\int_0^h 2\pi\, R^2\, dz = \pi\, R^2\, h$$

Sehingga volume tabung adalah:

$$V = \pi R^2\, h$$

a) Pembahasan Penelitian

Integral lipat dua merupakan salah satu teknik dalam kalkulus multivariabel yang digunakan untuk menghitung luas permukaan suatu objek dalam ruang tiga dimensi. Dalam geometri ruang, integral lipat dua dapat diterapkan untuk menentukan luas alas dan luas selimut tabung dengan hasil yang sesuai dengan metode geometri konvensional. Sebuah tabung terdiri dari dua alas berbentuk lingkaran dan selimut berbentuk persegi panjang yang melingkari tabung. Dengan menggunakan sistem koordinat silinder, luas alas tabung dapat dihitung dengan integral lipat dua, di mana elemen luas diferensial dinyatakan dalam bentuk

$$dA = r dr d\theta$$

Proses perhitungannya melibatkan integrasi dari jari-jari nol hingga R dan sudut dari nol 2π yang menghasilkan luas

$$Aalas = \pi R2$$

Karena tabung memiliki dua alas, maka luas total alas adalah

$$2\pi R2$$

integral lipat dua juga dapat digunakan untuk menghitung luas selimut tabung. Selimut tabung adalah bagian yang membungkus sisi samping tabung dan berbentuk persegi panjang dengan panjang $2\pi R$ (keliling alas) dan tinggi h. Dalam koordinat silinder, luas selimut dihitung dengan mengintegrasikan elemen luas diferensial terhadap sudut dan tinggi tabung. Integral yang digunakan adalah

$$\text{Aselimut} = \int_0^h \int_O^{2\pi} R\, d\theta\, dz$$

yang setelah diselesaikan memberikan hasil

$$\text{Aselimut} = 2\pi Rh$$

Dengan menjumlahkan luas alas dan luas selimut, diperoleh luas permukaan total tabung sebagai

$$\text{Atotal} = \text{Atotal\_alas} + \text{Aselimut}$$

$$\text{Atotal} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$$

yang sesuai dengan rumus konvensional dalam geometri.

integral lipat tiga digunakan untuk menghitung volume tabung dengan hasil yang identik dengan rumus volume konvensional. Dalam sistem koordinat silinder, elemen volume diferensial dinyatakan sebagai

$$\text{Dv} = r\, dr\, d\theta\, dz$$

Dengan melakukan integrasi terhadap jari-jari, sudut, dan tinggi tabung dalam batas masing-masing. Sehingga, penelitian ini membuktikan bahwa integral lipat dua dan tiga adalah metode yang efektif dalam menghitung luas permukaan dan volume tabung. Hasil perhitungan menggunakan integral lipat dua menunjukkan kesesuaian dengan metode geometri konvensional, sedangkan integral lipat tiga menghasilkan volume yang identik dengan rumus klasik. Pendekatan ini dapat diperluas ke berbagai bentuk geometri lainnya, seperti kerucut, bola, atau bentuk kompleks lainnya, yang semakin memperkuat peran integral dalam pemodelan geometri ruang

KESIMPULAN

Integral lipat dua dan integral lipat tiga terbukti sebagai metode yang efektif dalam menghitung luas permukaan dan volume tabung dengan pendekatan matematis yang akurat. Luas alas dan selimut tabung yang diperoleh melalui integral lipat dua sesuai dengan hasil metode geometri konvensional, sementara perhitungan volume menggunakan integral lipat tiga menghasilkan nilai yang identik dengan pendekatan klasik. Validasi melalui simulasi numerik menunjukkan tingkat akurasi yang tinggi, membuktikan bahwa metode integral ini dapat diandalkan dalam pemodelan geometri ruang. Selain itu, pendekatan ini tidak hanya bersifat teoretis, tetapi juga dapat diterapkan dalam berbagai bidang sains dan teknik yang memerlukan perhitungan luas dan volume dengan ketelitian tinggi. Dengan demikian, integral lipat dua dan tiga memberikan kontribusi penting dalam analisis geometri ruang serta membuka peluang untuk pengembangan lebih lanjut dalam pemodelan bentuk-bentuk kompleks lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Astatik, R. P. (2013). Aplikasi integral lipat dua dalam perhitungan volume bangun ruang di R3 dengan menggunakan program Maple. *Jurnal MSA (Matematika dan Statistika serta Aplikasinya)*, 31.

Ermawati, E., Rahayu, P., & Zuhairoh, F. (2019). Perbandingan solusi numerik integral lipat dua pada fungsi aljabar dengan metode Romberg dan simulasi Monte Carlo. *Jurnal MSA (Matematika dan Statistika serta Aplikasinya)*, 5(1), 46.

Haryono, N. A. (2009). Perhitungan integral lipat menggunakan metode Monte Carlo. *Jurnal Informatika*, 5(2).

Irwan, M., Kasse, I., Darmiani, D., & Jalil, E. (2021). Penerapan integral lipat dua dalam penentuan volume permukaan kuadratis. *Jurnal MSA (Matematika dan Statistika serta Aplikasinya)*, 9(1), 112-117.

Julaeha, S., & Putri, A. S. (2017). Representasi deret ke dalam bentuk integral lipat dua. *KUBIK: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, 2(1).

Munir, R. (2008). *Metode numerik revisi kedua*. Bandung: Informatika Bandung.

Purcell, E. J., & Varberg, D. (1990). *Kalkulus dan geometri analitis Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.

Varberg, D., & Purcell, E. J. (2010). *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid I*. Jakarta: Erlangga.

Wahyu, S. B. (2001). *Kalkulus peubah banyak dan penggunaannya*. Bandung: ITB Bandung.