

Studi Literatur: Analisis Komparatif Aplikasi Metode Pengacakan (*Derangement*) Dalam Matematika Diskrit Pada Ujian Berbasis *Online*

Rahmad Mulia Abdi Lubis¹, Dinda Erliananda², Almira Amir³

UIN Syahada Padangsidempuan^{1,2,3}

muliarahmad1987@gmail.com¹, dindaerliananda1@gmail.com², almiraamir70@gmail.com³

Abstract

This research is a literature study that aims to comparatively analyze various randomization techniques and their latest applications in the context of discrete mathematics, particularly in the implementation of online-based exams in schools where the questions being tested are randomized first. The main focus of the discussion is directed at a comparison of the Fisher-Yates/Knuth Shuffle algorithm, Linear Congruential Generator (LCG), and the application of the concept of derangement and polynomial derangement in combinatorial theory. The research method used is a literature review of national articles accredited by SINTA and international articles indexed by Scopus in the period 2020–2025. The study's results show that modern randomization algorithms such as the Fisher-Yates and Knuth Shuffle have advantages in producing uniform random distributions and are computationally efficient, while LCGs are often used in applications requiring long-period pseudo-random number generation. Furthermore, derangement polynomials in discrete mathematics provide a strong theoretical foundation for understanding deterministic yet complex randomization models.

Keywords: *Derangement, Discrete Mathematics, Applications, Online Based Exam.*

Abstrak

Penelitian ini merupakan studi literatur yang bertujuan untuk menganalisis secara komparatif beberapa teknik pengacakan dan aplikasi terbarunya dalam konteks matematika diskrit, khususnya pada pelaksanaan ujian berbasis *online* di sekolah dimana soal yang diujikan dilakukan proses pengacakan terlebih dahulu. Fokus utama pembahasan diarahkan pada perbandingan algoritma Fisher-Yates/Knuth Shuffle, Linear Congruential Generator (LCG), serta penerapan konsep derangement dan polinomial derangement dalam teori kombinatorial. Metode penelitian yang digunakan adalah kajian literatur terhadap artikel nasional terakreditasi SINTA dan artikel internasional terindeks Scopus pada periode 2020–2025. Hasil kajian menunjukkan bahwa algoritma pengacakan modern seperti Fisher-Yates dan Knuth Shuffle memiliki keunggulan dalam menghasilkan distribusi acak yang seragam dan efisien secara komputasional, sementara LCG sering digunakan dalam aplikasi yang memerlukan pembangkitan bilangan acak semu dengan periode panjang. Selain itu, derangement polynomials dalam matematika diskrit memberikan dasar teoritis yang kuat untuk memahami model pengacakan yang bersifat deterministik namun kompleks.

Kata Kunci: Pengacakan, Matematika Diskrit, Aplikasi, Ujian Berbasis Online.

A. PENDAHULUAN

Salah satu bentuk khusus dari permutasi yang memiliki peran penting dalam analisis struktur kombinatorial adalah *derangement*, yaitu permutasi di mana tidak ada satu pun elemen

yang menempati posisi asalnya dimana konsep ini relevan dalam berbagai permasalahan enumeratif dan probabilistik, terutama ketika dibutuhkan pengacakan menyeluruh tanpa kecocokan posisi (Rosen, 2019).

Pengacakan (*Derangement*) merupakan permutasi $\{1, \dots, n\}$ yang tidak memiliki tempat yang tetap (Wibowo, A., 2022). Dengan kata lain *Derangement* merupakan permutasi objek-objek, dimana tidak ada objek yang menempati tempat aslinya.

Dalam kajian kombinatorika, *derangement* sering muncul sebagai contoh klasik penerapan prinsip inklusi–eksklusi, karena perhitungannya melibatkan pengurangan kasus permutasi yang memiliki satu atau lebih titik tetap (*fixed points*) hingga seluruh titik tetap dieliminasi (Brualdi, 2010; Lovász, 1993). Permutasi tanpa titik tetap ini tidak hanya penting secara teoretis, tetapi juga banyak digunakan dalam pemodelan situasi kehidupan nyata, seperti masalah surat dan amplop, pertukaran tempat duduk, hingga pengacakan data untuk keperluan keamanan dasar (Tucker, 2012).

Matematika diskrit memiliki peranan penting dalam pengembangan algoritma, teori graf, kriptografi, dan berbagai aplikasi komputasi modern. Salah satu topik fundamental di dalamnya adalah teori pengacakan (*derangement*), yang berfungsi untuk menghasilkan variasi, ketidakpastian, dan efisiensi dalam proses komputasi. Teknik pengacakan banyak digunakan dalam pembangkitan bilangan acak, penataan data acak, maupun penyusunan kombinasi dan permutasi pada berbagai konteks (Abdullah, 2023; Prakarsa, dkk. 2020). Dalam implementasi modern, pengacakan juga berperan dalam sistem *Computer-Based Test (CBT)*, kriptografi, serta game edukasi yang memerlukan hasil acak untuk menjaga keadilan dan variasi (Aini & Etistika, 2022; Kim, dkk. 2021).

Berbagai algoritma telah dikembangkan untuk melakukan proses pengacakan. Di antaranya adalah algoritma Fisher-Yates Shuffle yang pertama kali diperkenalkan pada tahun 1934, kemudian dikembangkan oleh Knuth (1969) menjadi Knuth Shuffle yang lebih efisien (Xu, A. 2023). Selain itu, metode Linear Congruential Generator (LCG) juga digunakan untuk menghasilkan bilangan acak semu berdasarkan relasi kongruensi linear (Jang, dkk. 2020). Di sisi lain, teori kombinatorial seperti *derangement numbers* dan *derangement polynomials* digunakan untuk menganalisis sifat pengacakan secara matematis, terutama dalam konteks permutasi tanpa titik tetap (Dasli & Qi, 2022; Pohan, dkk. 2022).

Kebutuhan akan pengacakan dalam dunia komputasi muncul sebagai respons terhadap berbagai tantangan, mulai dari memastikan keacakan urutan data, memproduksi kunci

kriptografi, hingga mencegah pola prediktif dalam sistem evaluasi. Dalam ranah aplikasi, terutama pendidikan, pengacakan secara ekstensif digunakan untuk menciptakan soal ujian daring (*online exam*) yang berbeda bagi setiap peserta untuk meminimalisir peluang kecurangan (Abdullah, 2023; Prakarsa, dkk. 2023). Selain itu juga diterapkan pada game edukasi yang membantu meningkatkan motivasi belajar siswa (Aini & Etistika, 2022).

Sementara itu, di ranah murni, pengacakan berakar pada masalah-masalah permutasi dan kombinasi, yang paling menonjol adalah masalah *derangement* yang pertama kali diinisiasi oleh Pierre Rémond de Montmort pada tahun 1708 (Kim, dkk. 2021).

Dengan demikian, signifikansi penelitian ini terletak pada penyediaan panduan komprehensif bagi peneliti dan praktisi untuk memilih teknik pengacakan yang tepat.

Berdasarkan latar belakang tersebut, studi literatur ini bertujuan untuk menganalisis secara komparatif beberapa teknik pengacakan dan aplikasi terbarunya dalam konteks matematika diskrit, khususnya pada pelaksanaan ujian berbasis *online* di sekolah dimana soal yang diujikan dilakukan proses pengacakan terlebih dahulu.

B. KAJIAN TEORI

Teknik Pengacakan Algoritma: Fisher-Yates Shuffle (FYS) dan Linear Congruential Generator (LCG)

Dalam konteks komputasi, pengacakan sering kali dicapai melalui dua langkah: menghasilkan bilangan acak semu (*Pseudo-Random Number Generator* - PRNG) dan menggunakan bilangan tersebut untuk memanipulasi urutan data.

1. Linear Congruential Generator (LCG)

Algoritma Linear Congruential Generator (LCG) adalah salah satu PRNG tertua dan paling dikenal. LCG digunakan untuk menghasilkan bilangan acak semu, X_n menggunakan relasi rekurensi linier modular:

$$X_n = (aX^{n-1} + b) \text{ mod } m,$$

dimana parameter a , b , dan m menentukan kualitas serta periode bilangan acak yang dihasilkan (Prakarsa, dkk. 2020). Metode ini sederhana namun sering digunakan dalam simulasi komputer, kriptografi, serta sistem pengacakan digital.

2. Algoritma Fisher-Yates / Knuth Shuffle

Algoritma Fisher-Yates merupakan salah satu metode klasik dalam menghasilkan permutasi acak seragam (*uniform random permutation*) dari himpunan terhingga.

Algoritma ini ditemukan oleh Fisher dan Yates yang ditulis dalam bukunya “*Statistical tables for biological, agricultural and medical reseach*” (Kannabi, A. M. & Norhikmah, 2022).

Metode ini memiliki keunggulan dalam menghasilkan distribusi yang seragam tanpa adanya bias. Implementasi modern dari algoritma ini dikenal dengan nama Knuth Shuffle yang digunakan secara luas dalam berbagai bahasa pemrograman (Prakarsa, 2020). Dalam konteks aplikasi pendidikan, algoritma ini telah diterapkan pada sistem pengacakan soal ujian online dan game edukasi yang membantu meningkatkan motivasi belajar siswa (Aini & Etistika, 2022; Kannabi, A. M. & Norhikmah, 2022).

Artikel-artikel yang melampirkan aplikasi terapan menekankan FYS sebagai algoritma pilihan untuk pengacakan soal ujian CBT dan elemen *game* edukasi (Abdullah, N. F. 2023; Aini & Wijaya, E. Y. 2022; Pohan, dkk. 2022; Kannabi, A. M. & Norhikmah, 2022). Keunggulan FYS adalah kemampuannya untuk mengacak urutan secara *in-place* yang menjadikannya sangat efisien.

Konsep Kombinatorial Murni: Bilangan dan Polinomial *Derangement*

Derangement adalah permutasi dari elemen-elemen suatu himpunan sedemikian rupa sehingga tidak ada elemen yang berada pada posisi aslinya (*fixed point free permutation*) (Dağlı, M. C., & Qi, F., 2022; Jang, L. C., Kim, D. S., Kim, T., & Lee, H., 2020).

1. Bilangan *Derangement* (D_n)

Bilangan *Derangement* (D_n) adalah jumlah permutasi tanpa titik tetap pada himpunan berukuran n . Konsep ini merupakan fondasi matematis bagi banyak masalah pengacakan yang lebih kompleks. D_n dapat diekspresikan dalam rumus tertutup berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi:

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

D_n juga memenuhi relasi rekurensi penting seperti $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ untuk $n \geq 1$ (Dağlı, M. C., & Qi, F., 2022)

Konsep *derangement* berasal dari studi kombinatorika klasik yang pertama kali diperkenalkan oleh Pierre Rémond de Montmort pada tahun 1708. Derangement numbers merepresentasikan jumlah permutasi dari n elemen tanpa adanya elemen yang menempati posisi asalnya. Pengembangannya menghasilkan *derangement polynomials* yang

digunakan untuk mendeskripsikan fungsi pengacakan dalam konteks matematis (Xu, A. 2023; Kim, T., dkk. 2021).

2. Polinomial *Derangement* dan Generalisasinya

Polinomial *Derangement* ($D_n(x)$) adalah perluasan alami dari Bilangan *Derangement*. Penelitian terkini mengeksplorasi generalisasi konsep ini ke tingkat yang lebih tinggi, menghubungkannya dengan berbagai fungsi khusus dalam matematika diskrit:

- a. Polinomial *Derangement* dan *r-Bell*: Ditemukan identitas-identitas baru yang melibatkan Polinomial *Derangement* dan Polinomial *r-Bell* (Xu, A. 2023). memperluas hasil Clarke.
- b. Polinomial *Derangement* Degenerat: Merupakan versi degenerat dari Polinomial *Derangement* yang dihubungkan dengan distribusi *Gamma* degenerat dan Polinomial *Bell* degenerat penuh (Kim, T., dkk. 2021).
- c. Polinomial *Derangement* Sinus dan Kosinus: Diperkenalkan Polinomial *Derangement* dua variabel, $D_n(c)(x,y)$ dan $D_n(s)(x,y)$, yang aplikasinya terhubung dengan momen dari beberapa varian variabel acak *Gamma* (Jang, L. C., dkk, 2020).

Bilangan *Derangement* Tergeneralisasi: Membahas relasi rekurensi dan identitas untuk bilangan *derangement* tergeneralisasi yang melibatkan bilangan *Harmonic* tergeneralisasi dan bilangan *Stirling* jenis pertama (Dağlı, M. C., & Qi, F. (2022).

C. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kajian literatur (*library research*) dengan menelaah artikel-artikel ilmiah yang relevan pada periode 2020–2025. Pemilihan metode ini didasarkan pada tujuan penelitian yang berfokus pada penyusunan sintesis teoretis dan praktis mengenai *derangement*, bukan pada eksperimen empiris di lapangan. Artikel yang dikaji bersumber dari jurnal nasional terakreditasi SINTA 1–5 serta jurnal internasional terindeks Scopus, yang diperoleh melalui basis data Google Scholar, ScienceDirect, SpringerLink, serta portal Garuda Ristekdikti.

Prosedur yang digunakan mencakup beberapa tahapan kunci:

1. Identifikasi Sumber: Sumber utama penelitian ini adalah beberapa artikel jurnal ilmiah yang telah diidentifikasi.

2. Kategorisasi Tema
3. Analisis Konten: Dilakukan ekstraksi data berupa teknik, aplikasi, identitas matematis, relasi rekurensi, dan temuan utama dari setiap artikel
4. Sintesis Komparatif: Dilakukan perbandingan antar-kategori untuk mengidentifikasi keunggulan komparatif, batasan, dan tren aplikasi terbaru, yang disajikan pada Bagian 4.

D. HASIL DAN PEMBAHASAN

Komparasi Algoritma Pengacakan Praktis (FYS vs. LCG)

Dalam implementasi sistem informasi, keacakan urutan soal ujian menjadi faktor krusial untuk menjaga integritas evaluasi (Abdullah, N. F., 2023; Pohan, 2022). Dua algoritma utama yang dikaji, FYS dan LCG, memiliki peran yang berbeda.

| Kriteria Komparasi | Fisher-Yates Shuffle (FYS) / Knuth Shuffle | Linear Congruential Generator (LCG) |
|-------------------------------|--|---|
| Fungsi Utama | Menghasilkan permutasi acak seragam dari urutan berhingga (<i>shuffling</i>) | Menghasilkan urutan bilangan acak semu (PRNG) |
| Kualitas Keacakan | <i>Uniform Random Permutation</i> (setiap urutan punya probabilitas sama), dianggap lebih ideal untuk <i>shuffling</i> . | Kualitas sangat bergantung pada parameter, periodenya terbatas, dan rentan terhadap pola jika tidak diimplementasikan dengan benar. |
| Aplikasi Khas | Pengacakan Soal CBT, Game Edukasi, Kartu | Membangkitkan nilai acak untuk FYS, Kriptografi Sederhana, |

| Kriteria Komparasi | Fisher-Yates Shuffle (FYS) / Knuth Shuffle | Linear Congruential Generator (LCG) |
|-----------------------------|--|---|
| | dalam Permainan | Simulasi Monte Carlo. |
| Keunggulan dalam CBT | Dapat meminimalisir tingkat kecurangan siswa karena urutan soal yang disajikan berbeda untuk setiap peserta. | Menyediakan <i>seed</i> unik berdasarkan parameter siswa (misalnya NIS) untuk menginisiasi urutan acak. |

FYS terbukti lebih unggul dalam konteks *shuffling* soal ujian dan elemen *game* edukasi (Aini, dkk, 2022; Pohan, dkk., 2022; Kannabi, 2022). Sementara itu, LCG sering digunakan sebagai generator bilangan acak semu untuk menyediakan nilai *seed* yang kemudian digunakan oleh FYS untuk melakukan proses *shuffling* (Prakarsa, 2021). Sinergi ini menunjukkan bahwa kedua teknik ini tidak selalu saling menggantikan, melainkan dapat melengkapi satu sama lain dalam arsitektur sistem pengacakan.

Aplikasi Terapan Terbaru: Pengacakan Ujian dan Game

Aplikasi teknik pengacakan dalam matematika diskrit telah berkembang pesat seiring dengan digitalisasi proses evaluasi.

1. Computer Based Test (CBT)

Penerapan FYS atau Knuth Shuffle dalam CBT telah menjadi praktik standar untuk memastikan keadilan dan meminimalkan kecurangan. Penelitian Abdullah (2023) menunjukkan bahwa dengan menerapkan FYS, waktu koreksi ujian dapat dipangkas secara drastis dan secara signifikan mengurangi peluang siswa saling menyontek selama ujian. Pohan dkk. (2022) menegaskan bahwa penggunaan Algoritma Knuth Shuffle pada SMK Gelora Jaya Nusantara Medan berhasil memangkas waktu pengoreksian hasil ujian dari 15 menit menjadi 32 detik per kelas. Sementara itu, Prakarsa dkk. (2021)

menunjukkan bahwa kombinasi LCG dan FYS memastikan setiap siswa mendapat soal ujian yang berbeda berdasarkan Nomor Induk Siswa (NIS) mereka, yang secara efektif mencegah kecurangan.

2. *Game* Edukasi:

Teknik pengacakan FYS juga memainkan peran vital dalam *game* edukasi. Pengacakan soal pada *Goalpro Education Game* menggunakan Algoritma Fisher-Yates, yang membantu meningkatkan motivasi belajar siswa dan menanamkan nilai karakter kemandirian, karena urutan soal yang acak mencegah siswa saling mencontek (Aini, N., & Wijaya, E. Y., 2022). Hal ini menggarisbawahi peran pengacakan dalam menciptakan lingkungan belajar yang interaktif dan berintegritas.

Sintesis Komparatif dan Arah Penelitian

Perbandingan menunjukkan adanya dikotomi yang jelas namun saling melengkapi antara teknik pengacaka. FYS (Knuth Shuffle) adalah pilihan definitif untuk aplikasi yang membutuhkan permutasi seragam dari himpunan berhingga, seperti dalam CBT dan *game*. Ini adalah solusi yang telah teruji secara praktis (Abdullah, N. F., 2023; Pohan, dkk 2022).

Sintesis: Meskipun FYS/LCG memberikan solusi praktis, dasar matematis yang menjamin *keacakan sejati* (bahwa tidak ada pola yang dapat diprediksi) pada dasarnya terikat pada prinsip-prinsip kombinatorial, termasuk potensi koneksi dengan masalah *derangement* yang lebih luas (misalnya, masalah permutasi di mana beberapa elemen dilarang menempati posisi tertentu). Arah penelitian masa depan harus mencakup validasi statistik dari implementasi FYS/LCG menggunakan tolak ukur yang berasal dari sifat-sifat distribusi Polinomial *Derangement* dan generalisasinya.

E. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil kajian literatur terhadap berbagai penelitian terkait, dapat disimpulkan bahwa teknik pengacakan dalam matematika diskrit terus berkembang seiring kemajuan teknologi komputasi. Algoritma Fisher-Yates dan Knuth Shuffle menjadi pilihan utama dalam pengacakan yang efisien dan seragam, sedangkan metode Linear Congruential Generator digunakan sebagai pembangkit bilangan acak semu dengan kontrol deterministik. Sementara itu, teori *derangement polynomials* memberikan landasan teoritis penting dalam memahami struktur matematis dari pengacakan. Sinergi antara teori matematika dan penerapan praktis menunjukkan bahwa pengacakan tidak hanya berperan dalam matematika murni, tetapi juga

dalam berbagai sistem digital modern seperti ujian berbasis komputer dan game edukasi.

Secara komparatif, sementara FYS memberikan solusi praktis untuk masalah *shuffling*, teori *derangement* memberikan validasi kombinatorial dan alat analitik untuk memahami sifat-sifat keacakan secara fundamental. Disarankan agar pengembangan sistem pengacakan di masa depan mengintegrasikan kedua temuan ini untuk mencapai pengacakan yang tidak hanya efisien tetapi juga memiliki garansi keacakan matematis yang terverifikasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah, N. F. (2023). Pengembangan dan Pengujian Aplikasi Computer Based Test dengan Menggunakan Algoritme Fisher-Yates Shuffle sebagai Pengacakan Soal. *JCSE*, 4(1), 50–60.
- Aini, N., & Wijaya, E. Y. (2022). Implementasi Algoritma Fisher-Yates pada Pengacakan Soal Goalpro Education Game. *Jurnal Edutic*, 8(2), 147–154.
- Brualdi, Richard A. (2010). *Introductory Combinatorics* (5th ed.). London: Pearson.
- Daşlı, M. C., & Qi, F. (2022). Several Recurrence Relations and Identities on Generalized Derangement Numbers. *Results in Nonlinear Analysis*, 5(2), 185–190.
- Jang, L. C., Kim, D. S., Kim, T., & Lee, H. (2020). Some Identities Involving Derangement Polynomials and Moments of Gamma Random Variables. *Journal of Function Spaces*, 2020, 6624006.
- Kannabi, A.M., & Norhikmah. (2022). Implementasi Algoritma Fisher-Yates Shuffle Game pada Pembelajaran Huruf Hijaiyah, *SISTEMASI: Jurnal Sistem Informasi*, 11(3), 681-695.
- Kim, T., Kim, D. S., Lee, H., & Jang, L. C. (2021). A Note on Degenerate Derangement Polynomials and Numbers. *AIMS Mathematics*, 6(6), 6469–6481.
- Lovász, László. (1993). *Combinatorial Problems and Exercises* (2nd ed.). Amsterdam: North-Holland.
- Pohan, M. I., Hariyanto, E., & Izhari, F. (2022). Pengacakan Soal Ujian Online Berbasis Web Menggunakan Algoritma Knuth Shuffle. *Bulletin of Information Technology*, 3(4), 294–300.
- Prakarsa, A., Sunarto, A. A., & Prajoko, P. (2020). Model Pengacakan Soal Ujian Online SMA Menggunakan Metode Linear Congruential Generator dan Fisher-Yates. *Progresif: Jurnal Ilmiah Komputer*, 16(2), 133–142.

- Rosen, Kenneth H. (2019). *Discrete Mathematics and Its Applications (8th ed)*. New York: McGraw-Hill.
- Rusdiyanto, dkk. (2022). Aplikasi Ujian Online Dan Penerapan Algoritma Lcg Untuk Proses Pengacakan Soal Ujian Di Smk Negeri Tugumulyo: *JUTIM (Jurnal Teknik Informatika Musirawas)*, 7(2), 99-108.
- Tucker, Alan (2012). *Applied Combinatorics (6th ed.)*. USA: Wiley.
- Wibowo, A. (2022). *Matematika Diskrit*. Semarang: Yayasan Prima Agus Teknik.
- Xu, A. (2023). Some Identities Involving Derangement Polynomials and r-Bell Polynomials. *AIMS Mathematics*, 9(1), 2051–2062.